ВЕСТНИК ПЕРМСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

2001 Информационные системы и технологии Вып. 5

Моделирование сложных систем с обменом информации физическими методами

В.М.Жарков

Естественно-Научный институт при Пермском государственном университете, 614600, Пермь, ул.Генкеля, 4, e-mail: vita@psu.ru

Делается попытка с единой точки зрения проанализировать современные тенденции западной экономофизики. Из всего множества теорий, описывающих динамику фондового и финансового рынков, выбираются те, которые, по-нашему мнению, вольются в недалеком будущем в новую отрасль науки.Рассмотрены теория фондовых крахов Сорнеттэ, теория Minority Game Жанга и теория Лукса. Дается их подробное изложение. Обсуждаются пути дальнейшего обобщения трех указанных нами подходов.

1. Введение

В последние годы на Западе возникло новое научное направление -экономофизика. Его создали так называемые Quants -специалисты, пришедшие из точных наук и военно-промышленного комплекса: математики, физики, специалисты, занимавшиеся информационными технологиями и системами управления военными системами. Возникновение этого направления совпало с нарастающим процессом глобализации рынков, в частности, финансовых, и распадом системы социализма. Сочетание этих процессов с нарастающей глубокой структурной перестройкой мировой науки уже начинает приводить к формированию нового междисциплинарного направления, качественно отличающегося от прежних приоритетных научных направлений ведущих стран мира и органично сливающегося с информационными технологиями.

Можно предположить, что отличительными характеристиками данного подхода будут: 1) широчайшая вовлеченность представителей фактически всех научных направлений. Возникнет своеобразная распределенная система разработчиков теорий и потребителей в лице банков и финансовых компаний, обьединенных через Интернет и представляющих своеобразную саморазвивающуюся систему (в западной литературе для таких систем применяется термин COIN - система коллективного интеллекта), 2) в силу присущих данной науке свойств синергизма имеет смысл говорить о скором превращении возникающей сегодня теоретической концепции, описывающей функционирование глобальной системы мирового капитала в некую единую "теорию всего" (имеет смысл говорить также об "абсолютной теории трэйдинга"). Данная схема должна описать процессы миграции капитала, прояснить ее динамические законы, конкретизировать законы, управляющие динамикой национальных секторов финансовых рынков, а также дать конструктивные процедуры для построения механических торговых систем (МТС) для трэйдеров. Цель данного обзора: дать введение в предмет экономофизики.

2. Современные тенденции

2.1. Почему это интересно ?

Чтобы понять, почему экономика интересна физикам и какие задачи она выдвигает перед ними, полезно остановиться на том положении теории, которая существует в этой области. Мы не претендуем на полноту анализа, который можно найти в других обзорах, и будем анализировать проблему с точки зрения физики. Если взглянуть с этой позиции, то можно отметить увеличивающийся разрыв между теорией и экспериментом. С одной стороны, теории становятся все более изощренными и согласованными с небольшим количеством специально подобранных фактов; с другой стороны, практическая работа трэйдеров породила свою дисциплину, слабо связанную с этими теориями. Если говорить коротко, то теория анализирует статически равновесные свойства. Очень мало говорится о том, как достигается равновесие и достигается ли оно вообще. У физиков создается впечатление, что теория представляет приближение среднего поля и описывает баланс спроса и предложения. Необходимо найти динамику процесса; более того, перенесение в экономофизику опыта таких дисциплин, как неравновесная статистика, позволит сформулировать динамическую теорию. Экспериментальная область в финансовой сфере очень развита, хотя важнейшие события (крахи) до сих пор не обьясняются. Можно сравнить нынешнюю ситуацию в экономике с временем до работ Больцмана и Карно в физике. Исследования экономических явлений окажут влияние и на физику. Отмечая определенную застойность статистической физики, выскажем предположение, что экономические явления, возможно, откроют новый путь в развитии многих глав статистической физики.

2.2. Что делать ?

Поскольку у нас нет общего подхода, можно попытаться строить модели "в темноте"; таким образом появились многие модели, предложенные физиками. Мы смеем предложить некоторую философию или парадигму. Конечно, хотелось бы иметь простую модель для описания динамики финансовых активов, чтобы затем иметь возможность обобщать ее. Примером может служить модель Изинга в магнетизме.

Сформулируем список требований к модели:

1) должно присутствовать большое количество агентов,

2) каждый агент имеет альтернативу в своем выборе,

3) суммарное действие агентов дает цену, которая известна всем,

4)агенты используют цену для планирования своих действий.

Эти требования крайне общие, мы приведем еще два требования: а) нет фундаментальных новостей, отличных от ценовых, б) агенты не верят ни одной теории, они учатся на собственном опыте и верят, что только цена содержит всю информацию.

Мы хотим исследовать рынок в рамках указанных предположений при отсутствии внешних воздействий. Реальная экономика содержит, конечно, как внутренние, так и внешние факторы.

3. История

Кратко опишем историю возникновения и современное состояние экономофизики. Началом экономофизики можно считать 1995 г., когда получила широкое распространение аналогия между турбулентным движением жидкости и поведением кросс-курсов на рынке FOREX. За очень короткое время развитая для исследования неустойчивостей жидкостей и газов теория хаоса и так называемых странных аттракторов нашла применение для описания финансовых активов, валют, акций, фьючерсов и опционов. Но главным периодом в становлении этой науки следует считать время кризисов 1997-1998 гг. Именно за этот период были разработаны наиболее глубокие и плодотворные подходы к описанию скачкообразных и резких движений глобальных и локальных рынков. Оказалось, что финансовые кризисы хорошо описываются теорией динамических фазовых переходов. За короткое время авторам данной теории P. Bak и D. Sornette были обьяснены крахи 1929, 1987 и 1998 гг. на основе нового для экономической науки подхода. Этот так называемый "микроскопический подход" был инспирирован современной теорией критических явлений, физикой твердого тела и неупорядоченных систем. Если раньше для описания рынков авторы брали за основу некие макроскопические параметры, например, спрос и предложение, то представители "микроскопического подхода" ввели в обиход понятие ансамбля агентов (трэйдеров). Этот ансамбль агентов описывает, например, толпу трэйдеров в операционном зале Нью-Йоркской биржи, а также совокупность связанных с ними клиентов, работающих на рынке. Таким образом, основной задачей в описании суммарной динамики цен становится изучение микроскопических взаимодействий между трэйдерами (агентами рынка), которые носят в основном психологический характер. Если раньше авторы пытались описать поведение рынка в целом на основе обобщенных характеристик, то сейчас акцент перенесен на изучение локальных взаимодействий.

Опишем три основные схемы, предложенные на сегодня в данной области:

1) теория фондовых крахов Сорнеттэ (D.Sornette),

2) теория Minority Game (MG) Жанга (Zhang) и Кульетта,

3) теория Лукса (Lux).

Обратим внимание читателя на то, что рассмотренный нами список совсем не является исчерпывающим. Мы не ставим целью рассказать о всех теориях и схемах, поскольку существующие имеют тенденцию к быстрому изменению, а действительность постоянно выдвигает новые идеи и предложения. В таких условиях мы ставим перед собой следующую цель: находясь в гуще появляющихся и постоянно развивающихся теорий, дать некий набор методологических правил выбора схем так, чтобы предложенная нами совокупность (сеть) теорий в будущем выросла в некую динамически развивающуюся единую теоретическую концепцию, которая может претендовать на "абсолютную теорию трэйдинга". Есть основания полагать, что эта теория будет иметь черты, качественно отличающие ее от прежних теорий, и наша задача -распознать в сегодняшнем многообразии схем набор неких новых черт и будущих связей между ними.

Указанные нами три направления, как нам представляется, могут стать стартовым "бульоном" для взращивания интегрирующего подхода. Дадим наше видение дальнейшего развития этих направлений. Безусловно, за основу необходимо принять теорию критических явлений как самую глубокую. Изучение опыта крахов дает нам в нашу копилку такие конструкции, как микромодели рынка, описываемые моделями магнетиков статистической физики. Примем их за основу. Далее рассмотрим подход Жанга (MG). И здесь мы встречаемся с магнитными моделями, но уже неупорядоченных магнетиков (отметим, что теория неупорядоченных систем до сих пор не построена, что свидельствует о ее сложности). Поскольку MG описывает спекулятивную, без особых скачков динамику активов, то первое впечатление таково, что можно обьединить схемы MG и схему Сорнеттэ, просто меняя набор обменных интегралов (параметров, описывающих воздействия трэйдеров друг на друга) от упорядоченного (крахи) набора к неупорядоченному (спекулятивная игра), получая таким образом единое описание как крахов, так и спокойную игру трэйдеров. Более внимательное рассмотрение теории Жанга показывает, что здесь мы имеем в основе качественно иную модель и аналогию. Будет видно, что в MG магнитная модель есть квадрат другой, более фундаментальной схемы.

Если мы обратимся за помощью к крайне модной в физике твердого тела области высокотемпературной сверхпроводимости (ВТСП), то с удивлением обнаружим, что в основе MG лежит та же модель, что и в ВТСП–так называемая модель Хаббарда и родственные ей модели! Известно, что магнетик можно получить из модели Хаббарда во втором порядке по энергии распространения возбуждений (новостей), как и в MG. Более того, если мы посмотрим на точные решения МХ (модель Хаббарда), то заметим удивительное сходство с уравнениями, которые предложил Лукс для описания рынка, состоящего из двух сортов агентов. Напрашивается такой вывод: все три теории (а это на сегодня есть основной mainstream) в экономфизике прямиком ведут ее авторов к следующей фазе обобщений–переход на уровень моделей, взятых из области ВТСП. Перейдем непосредственно к описанию трех составных моделей для того, чтобы отмеченная нами связь не казалась слишком отвлеченной. Итак, теория Сорнеттэ.

4. Фондовые крахи как критические точки фазовых переходов в ансамбле агентов

Фондовые крахи есть одномоментные финансовые явления, которые интересны как теоретикам, так и практикам. В рамках теории эффективного рынка только появление какого-то залпа негативной информации может вызвать крах, но здесь невозможно определить однозначно, какой информацией должен обладать этот залп, чтобы вызвать крах. Наша гипотеза состоит в том, что фондовые крахи вызываются усилением медленно нарастающих низкочастотных (в пространстве между трэйдерами и во времени) корреляций в поведении спекулянтов, приводя к коллапсу фондового рынка в критической точке.

Использование слова "критический" не является чисто литературным приемом, на языке математики сложные системы в своем поведении могут проходить такие точки, определяемые как взрывоподобный рост некоторых величин, которые в обычных условиях ведут себя достаточно плавно. Как правило, для нелинейных динамических систем существование критических точек является скорее правилом, нежели исключением. Отмечая своеобразный характер протекания фондовых крахов, интересно сравнить их с фазовыми переходами, хорошо известными из физики критических явлений. Тот подход, который мы развиваем применительно к фондовым крахам, хорошо известен в статистической физике. Основной элемент нашего анализа -трэйдер, который может находиться в трех состояниях (buy, sell, hold) -покупки, продажи и ожидания. Процесс изменения состояния каждого трэйдера воздействует на цены посредством влияния на других трэйдеров. Индивидуально трэйдеры оказывают влияние только на ограниченный круг других трэйдеров, поднимая или опуская цены. Естественно сравнить теорию фондового рынка с такими неравновесными явлениями, как землятресения, разрушение материалов. Конечно, между этими событиями есть и различия: ансамбль трэйдеров обладает на уровне агентов свойством отражения и рефлексивности.

Первое предложение использовать аналогию с фазовыми переходами выдвинул Сорнеттэ [8] в 1987 г. Этот результат был подтвержден независимо в работах Френд и Фейгенбаум в 1996 г. для крахов 1929 и 1987 гг., где было показано наличие таких лог-периодических колебаний, что частота колебаний при приближении к краху возрастает. Более серьезное исследование с использованием нелинейной ренорм-группы было проведено Сорнеттэ в 1997 г. Другие группы также использовали идеи Сорнеттэ.

4.1. Модель

4.1.1. Момент краха

Обсудим, как разворачивается процесс. Крах происходит тогда, когда большое число агентов одновременно размещают ордера на продажу. Эта группа агентов должна быть очень многочисленной для того, чтобы маркетмэйкеры не смогли скупить все ордера. Забавный момент здесь состоит в том, что агенты, разместившие ордера, ничего не знают о поведении других таких же агентов. Они не договариваются об этом специально и не ориентируются на какого-то лидера. В действительности они конфликтуют в размещении ордеров буквально до самого момента кризиса. Здесь главный вопрос следующий: что это за координирующий механизм, вынуждающий агентов действовать столь согласованно. Мы даем ответ: все трэйдеры мира организованы в некую сеть (семья, друзья, коллеги по работе), и они через нее взаимодействуют друг с другом. Более конкретно, если я связан с ближайшими соседями, то существует два механизма действия на мое мнение: 1) мнения этих людей, 2) сопутствующие действия соседей, которые я принимаю.

Наше рабочее предположение состоит в том, что агенты начинают копировать и имитировать действия своих соседей, а не конфликтовать с ними. Хорошо видно, что сила 1) формирует локальный порядок, т.е. кластер из агентов, действующих в унисон, 2) порождает беспорядок. Мы в наших моделях хотим отразить борьбу этих сил: порядка и беспорядка. На языке цен активов это означает, что когда устанавливается порядок, воцаряется крах (все трэйдеры выставляют sell), а когда в системе беспорядок, то это означает баланс спроса и предложения (число buy уравновешивается числом sell). Отметим, что у нас микрокоординационный механизм появляется из макрокоординационного имтационного поведения трэйдеров; он следует из изучения механизма формирования решений трэйдеров.

Конечно, легче сказать, что крахи происходят от иррациональных причин. Если решение о продаже было получено независимо от других после чтения газетных новостей и собственного анализа, то мы должны признать координирующую роль новостей для трэйдеров и считать ее основной причиной крахов. Напротив, у нас основная причина крахов - коллективное имитационное поведение трэйдеров, повторяющих действия своих коллег. Мы не изучаем механизм воздействия агентов друг на друга, поскольку этот факт хорошо документирован, мы берем его как основу для модели, а не как вывод и заключение. Сначала мы рассматриваем вариант теории среднего поля, а потом формулируем микроскопическую модель.

4.1.2. Макроскопический подход

В духе среднего поля для коллективных систем простейший подход для описания имитационных процессов состоит в предположении, что скорость наступления краха h(t) управляется следующим уравнением

$$\frac{dh}{dt} = C\ h^{\delta}\ , \qquad \text{где } \delta > 1\ , \tag{4.1}$$

здесь C- есть положительная константа. Приближение среднего поля заменяет действие всего множества трэйдеров неким усредненным поведением, на которое ориентируются участники рынка. В этом смысле h(t) есть результат взаимодействия между всеми агентами. Член h^{δ} как раз и описывает это взаимодействие. Интегрируя (4.1), получаем

$$h(t) = \left(\frac{h_0}{t_c - t}\right)^{\alpha}\ , \qquad \text{где } \alpha \equiv \frac{1}{\delta - 1}\ . \tag{4.2}$$

Отсюда видно, что величина δ должна быть больше единицы для роста h(t) при приближении к точке краха. Параметр α должен лежать в диапазоне от 0 до 1 по экономическим причинам, в противном случае цена уйдет на бесконечность.

4.2. Микроскопическое моделирование

Рассмотрим сеть агентов, помеченных индексом i=1,2...N и выделим набор агентов, связанных с рассматриваемым агентом посредством некого механизма. Для простоты мы рассмотрим ситуацию, когда агент может быть только в двух состояниях: купить и продать.

Мы предположим, что состояния агента i определяются следующим уравнением:

$$s_i = sign\left(K \sum_{j \in N(i)} s_j + \sigma \varepsilon_i\right)\ , \tag{4.3}$$

здесь функция $sign(\cdot)$ равна +1 или -1 , K– положительная постоянная, а ε_i -нормально распределенная случайная величина. Это уравнение относится к классу стохастических динамических систем, описывающих ансамбль взаимодействующих частиц. Такие модели интенсивно изучаются в физике магнетизма, математике и биологии.

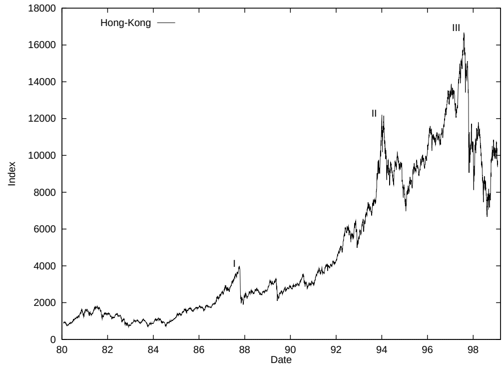

Рис.1. *Фондовый индекс Гонконга как функция времени. Обнаружены 3 большие пузыря с большими падениями индекса. Приблизительная дата крахов- октябрь 1987 г. (I), январь 1994 (II) и октябрь 1997 (III).*

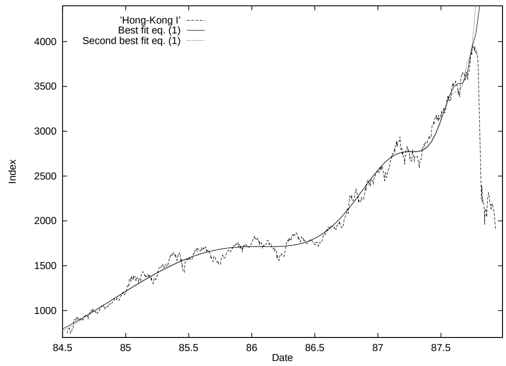

Рис.2. *Фондовый индекс Гонконга, кончающийся крахом в октябре 1987 г. Показана интерполяция формулой*

Здесь тенденция к имитации трэйдеров описывается константой K, тенденция к случайному поведению - σ. Таким образом, отношение K к σ определяет борьбу между порядком и беспорядком во временной последовательности ордеров и, следовательно, –вероятность краха. Более общая модель, которую можно дать, содержала бы произвольные K_{ij}' для каждой пары трэйдеров. Некоторые K_{ij}' могут быть отрицательны (противоимитация), но в среднем K_{ij}' -положительны (имитация). Отметим, что (4.3) описывает состояние агента в момент времени t. В следующий момент t установятся новые ε_i', приводя к новому воздействию на соседей и таким образом изменяя состояния всех агентов.

Таким образом, лучшее, что мы можем, это дать статистическое описание состояний. Можно выбрать много величин, описывающих ансамбль агентов как целое. По нашему мнению, лучшей величиной, описывающей ситуацию, когда большая группа агентов находится в состоянии сильной коррелированности (ведут себя одинаково), является восприимчивость системы. Для ее определения введем в (4.3) новый глобальный параметр влияния –G :

$$s_i = sign\left(K\sum_{j\in N(i)} s_j + \sigma\varepsilon_i + G\right). \qquad (4.4)$$

Этот глобальный параметр будет устанавливать состояния всех агентов, равных +1 , если $G > 0$ и -1 , если $G < 0$. Уравнение (4.3) соответствует случаю $G = 0$ (нет глобального влияния). Определим также среднее состояние $M = (1/I)\sum_{i=1}^{I} s_i$. Легко показать из симметрийных соображений, что когда $E[M] = 0$ агенты поровну распределены по состояниям +1 и -1 .

Восприимчивость системы определяется как производная:

$$\chi = \left.\frac{d(E[M])}{dG}\right|_{G=0} \qquad (4.5)$$

Видно, что восприимчивость системы определяет чувствительность среднего состояния на малое глобальное влияние. Восприимчивость имеет вторую интерпретацию: это изменение среднего на изменение случайных параметров ε_i . Эта интерпретация означает, что если вы рассмотрите двух агентов и одного из них вы приведете к определенному состоянию, тогда мера того, что и второй прийдет к тому же состоянию, будет пропорциональна χ. По этой причине мы верим, что восприимчивость есть корректная мера способности агентов согласовывать свои мнения. В этом случае два состояния, в которых бывают трэйдеры, дают глобальный механизм синхронизации через локальную имитацию, которая вызывает при определенных параметрах крах. Таким образом, за основу мы возьмем поведение восприимчивости, а h(t), мы предположим, будет зависеть от χ. Мы не утверждаем, что $h(t)$ пропорционально χ, поскольку есть много других величин, отражающих процесс координации между агентами, например, корреляционная длина–расстояние, на которое распространяется координация .

4.2.1. Иерархическая решетка алмаза

Реальный фондовый рынок состоит из ансамбля агентов, которые отличаются по размерам друг от друга на несколько порядков: от мелких частных инвесторов до гигантских пенсионных фондов. Далее структуры более высокого уровня накрывают рынок, например, глобальные рынки валют (USD, DM, YEN ,...), и текущие процессы глобализации и дерегулирования рынков формируют мировые системы рынков. Это означает, что структура финансовых рынков имеет свойства, характерные для физических иерархических систем, и трэйдеры покрывают все уровни иерархии. Конечно, это не означает жесткой иерархии на рынке в отличие от иерархии, наблюдаемой в обществе. Фактически на рынке присутствует горизонтальная структура для взаимодействия индивидуальных трэйдеров. Поэтому проанализируем вторую сетевую топологию для нашей модели.

Рассмотрим пару трэйдеров, которые связаны друг с другом. Заменим эту пару на элементарную ячейку кристалла алмаза, где эти трэйдеры займут противоположные точки на гранях. Кристалл алмаза содержит, в свою очередь четыре связи. Каждую из них заменим опять на ячейку кристалла и будем продолжать эту операцию дальше. После p итераций получим $\frac{2}{3}(2+4^p)$ трэйдеров в качестве вершин и 4^p связей между ними. Большинство трэйдеров имеют только двух соседей, некоторые - 2^p соседей, а другие - в промежутке между ними. Эта сеть отражает более реалистичную картину связей между агентами на рынке, чем прежняя на евклидовой плоскости.

Данная модель была решена в 1983 г. в работе Деррида. Опишем основные свойства ее решения. Существует критическое значение K_c, причем при $K < K_c$ восприимчивость конечна, при стремлении К к критическому значению она расходится. Существенное отличие данного примера от рассмотренных выше -наличие комплексного критического индекса. Это приводит к качественно другому поведению перед крахом. Общее выражение для χ следующее:

$$\chi \approx [A_0(K_c-K)^{-\gamma} + A_1(K_c-K)^{-\gamma+i\omega} + \ldots] \approx A_0'(K_c-K)^{\gamma} + A_1'(K_c-K)^{\gamma}\cos[\omega\log(K_c-K)+\psi].$$

Здесь A_0', A_1',ω and ψ - вещественные числа. Мы видим, что степенной закон в данном случае "подправлен" осцилляциями, причем их период стремится к нулю при приближении к критической точке. Ускоряющиеся осцилляции называются лог-периодическими колебаниями и $\frac{\omega}{2\pi}$ -их лог частота.

Вероятность наступления краха $h(t)$ ведет себя так:

$$h(t) \approx B_0(t_c-t)^{-\alpha} + B_1(t_c-t)^{-\alpha}\cos[\omega\log(t_c-t)+\psi']. \tag{4.6}$$

Существенный момент в финансовых приложениях - то, что в поведении цены до краха видны лог-периодические осцилляции. Локальные максимумы цен дают нам период колебаний, который стремится к нулю при приближении к t_c и следуют геометрической прогрессии , т.е. отношение двух последовательных периодов постоянно .

Этот факт легко проверить на практике, поскольку реальные графики демонстрируют обычно не степенное поведение, а колебательное. Если такие осцилляции удается обнаружить на графиках, то можно вычислить критические параметры и, следовательно, наиболее вероятный момент краха.

5. Minority Game (Игра в меньшинство)

5.1. Введение

На современных рынках акций, валют и товаров информация о движении цен распространяется среди всех участников. Конечно, не все участники интерпретируют одну и ту же информацию одинаково и принимают адекватные ей действия. В действительности каждый участник имеет определенный набор заранее готовых действий, реагируя на внешние события . Также хорошо известно, что глобальные рынки далеки от равновесия; коллективное поведение рынка иногда прерывается резкими изменениями (ралли или крахи), и эти, нарушающие обычную динамику, события следуют хорошо изученным законам скейлинга. Изучению этих эффектов посвящено много работ .

Пока до конца не ясно, являются ли эти эффекты результатом внешних событий или их дают взаимодействия агентов, составляющих рынок. С физической точки зрения рынок - прекрасный пример самоорганизующейся системы; каждый агент определяет свое поведение согласно своим взглядам на события. В простейшем случае эти события состоят в колебаниях цен. В экономике для этого необходимы какие-то внешние события: политические- голод, болезни, человеческая психология. Другой фактор–периодичность жизненных процессов (дни, недели, месяцы, годы), которые также воздействуют на цены. С теоретической точки зрения интересно проследить , как воздействуют внешние факторы на цены (или они генерируются внутренней динамикой ансамбля трэйдеров). В настоящей работе мы исследуем эту проблему без учета внешних факторов. У нас все агенты будут спекулянтами, они торгуют только с целью увеличения собственного капитала. Мы увидим, что очень богатая и сложная структура ценовых флюктуаций появляется от этой замкнутой системы трэйдеров , торгующих по относительно простым правилам. Несмотря на простоту нашей модели и стратегий ее участников, неучет внешних факторов, мы обнаружим поведение, которое оказывается весьма реалистичным. Этот результат говорит о том, что фондовый рынок представляет самоорганизующуюся критическую систему. Система достигает динамического равновесного состояния, характеризую-

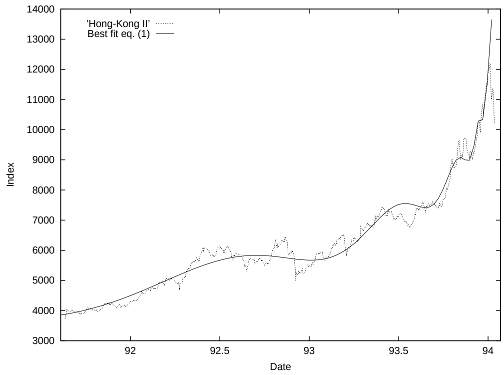

Рис.1. *Фондовый индекс Гонконга, кончающийся крахом января 1994 г.*

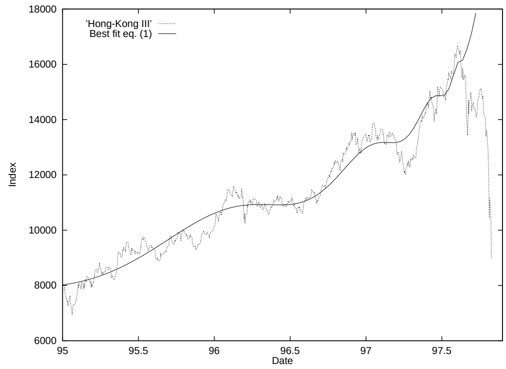

Рис.2. *Фондовый индекс Гонконга, кончающийся крахом октября 1997 г.*

щегося флюктуациями любого размера без необходимости тонкой настройки параметров или внешних факторов и движущих сил.

5.2. Определение модели

Каждый игрок первоначально снабжен одинаковым капиталом в двух формах: наличность (cash) $M_{i,t=0}$ и акции $S_{i,t=0}$. В любой момент времени t капитал игрока i равен $C_{i,t} = M_{i,t} + p_t S_{i,t}$, где p_t - цена акций в момент t. В этой модели есть только один вид акций. Все операции агентов состоят в многократном переключении между акциями и деньгами. Каждый игрок имеет стратегию, которая дает рекомендации: покупать или продавать определенное количество акций в следующий момент. Это решение зависит от информации, доступной агенту, т.е. от истории, игрок может инвестировать часть средств в акции, основываясь на своей стратегии. В момент t общая форма стратегии игрока i равна: $X_{i,t} = F_i[p_t, p_{t-1}, \ldots]$, где $X_{i,t}S_{i,t}$ -есть средства, выделяемые на покупку ($X_{i,t} > 0$) или продажу ($X_{i,t} < 0$) акций.

Наша модель берет начало от B. Arthur модели Bar Attendance, в которой игроки делают выбор "по истории". Этот принцип говорит нам, что выбор эффективной стратегии возможен лишь задним числом. В нашем случае стратегии распределены случайно. Агенты с малым капиталом удаляются и вместо них добавляются новые со случайным выбором стратегий. Эти правила отбора сохраняют популяцию трэйдеров.

По этим двум причинам 1) мы параметризуем функции F_i набором индикаторов: $I_k\{p\}$, 2) введем восстанавливающие эффекты, которые стремятся сбалансировать отношение $S_{i,t}/M_{i,t}$ к текущей цене p_t . Для индикаторов выберем различные комбинации скользящих средних с различными временными горизонтами : $\log p_t$ (e.g. $I_1 = \partial_t \log p_t$, $I_2 = \partial_t^2 \log p_t$, $I_3 = [\partial_t \log p_t]^2$ и т.д.). Временное усреднение делается за 10....100 шагов. Стратегии таким образом будут параметризованы ℓ числами $\eta_{i,k}$: $X_{i,t} = f\left(\sum_{k=1}^{\ell} \eta_{i,k} I_k\{p\}\right)$, где $f(x)$ нелинейные функции . Нелинейность $f(x)$ воспроизводит поведение реальных агентов на рынке. Агенты иногда играют от противного, т.е. в стратегию, которая не поддерживает трэнд, поскольку она представляет долю акций агента за один шаг игры. Отметим, что аргументы могут быть большими при существенных колебаниях цены. Поведение трэйдеров становится тогда очень осторожным. Такое поведение моделируется следующей функцией: $f(x) = x/[1 + (x/2)^4]$.

Количество акций $\Delta S_{i,t}$, которое i агент решает продать ($\Delta S_{i,t} < 0$) или купить ($\Delta S_{i,t} > 0$) определяется выражением:

$$\Delta S_{i,t} = X_{i,t} S_{i,t} + \frac{\gamma_i M_{i,t} - p_t S_{i,t}}{2\tau_i}. \qquad (5.7)$$

Здесь первый член сугубо спекулятивен, второй дает зависимость от $M_{i,t}$ и $S_{i,t}$. Мотивировка этого члена следующая: рассмотрим постоянные цены $p_t = p_0$ на некотором периоде. Реалистично будет уравновесить портфель на выбранном уровне $S_{i,t}/M_{i,t} = p_0/\gamma_i$. Эта операция не изменит капитала $C_{i,t}$. Смысл этого уравновешивания в том , что сейчас игрок занимает наиболее выгодную позицию относительно любых колебаний цен. Второй член моделирует это поведение. Действительно, если цены постоянны , все индикаторы I_k исчезают и исчезает первый член $X_{i,t}$. Тогда второй уравновешивает вклады $S_{i,t}/M_{i,t}$ до значения p/γ_i через время порядка τ_i. Итак, стратегия игрока определяется $\ell + 2$ параметрами: $\eta_{i,1}, \ldots, \eta_{i,\ell}, \gamma_i$ и τ_i. Агенты берут эти числа и принимают решения о покупке $\Delta S_{i,t}$, транзакции происходят по цене p_t. Определим суммарный спрос и предложение:

$$D_t = \sum_{i:\Delta S_{i,t}>0} \Delta S_{i,t}$$

$$O_t = -\sum_{i:\Delta S_{i,t}<0} \Delta S_{i,t}.$$

Когда спрос больше предложения, агенты берут акции $\Delta S_{i,t} > 0$ в следующем количестве: $\bar{\Delta} S_{i,t} = \Delta S_{i,t} O_t / D_t$, а продают акции $-\Delta S_{i,t}$ в количестве $(\bar{\Delta} S_{i,t} = \Delta S_{i,t})$.

Обратная ситуация наблюдается, когда $D_t < O_t$. Наша модель содержит также конечную сумму комиссии $\pi \Delta S_{i_t}$ $(\pi \sim 10^{-3})$ и случайные флуктуации $\epsilon_{i,t} M_{i,t}$ ($\epsilon_{i,t}$ -случайная переменная из интервала $[-\epsilon, \epsilon]$), которая, образно говоря, описывает тепловую баню, в которой агенты совершают сделки . Эти правила выражаются в следующих уравнениях:

$$S_{i,t+1} = S_{i,t} + \bar{\Delta} S_{i,t} M_{i,t+1} = [1 + \epsilon_{i,t}][M_{i,t} -$$

$$p_t (1+\pi) \bar{\Delta} S_{i,t}], \text{ если } \bar{\Delta} S_{i,t} > 0,$$

$$S_{i,t+1} = S_{i,t} + \bar{\Delta} S_{i,t} M_{i,t+1} = [1+\epsilon_{i,t}][M_{i,t} - p_t \bar{\Delta} S_{i,t}], \tag{5.8}$$

если $\bar{\Delta} S_{i,t} < 0$.

Новая цена p_{t+1} определяется уравнением (баланс спроса и предложения)

$$p_{t+1} = p_t \frac{< D_t >}{< O_t >}. \tag{5.9}$$

Здесь скобки есть усреднение по времени.

Отметим, что цена растет при росте спроса и падает при росте предложения. Также отметим, что этот закон спроса и предложения корректен по размерным соображениям. Численное моделирование уравнений очень обнадеживает. Несмотря на простоту и произвольность в выборе стратегий, получена крайне богатая история цен. Она демонстрирует флюктуации цен любого масштаба.

В зависимости от параметров и длины интервала мы видим также крахи произвольной направленности. Эти крахи есть результат коллективной игры трэйдеров . Полученный нами ценовый ряд напоминает поведение акций и валютных курсов. Это впечатление усиливается при среавнении его с рядом для S&P500 и его статистическими характеристиками; при проведении такого сравнения надо внимательно определять время.

Учитывая периодичность, присущую процессу торговли, удобно перейти к переменным $x = p_{t+\tau} - p_t$. Этот вопрос обсуждался в ряде работ, где это преобразование было введено. Следуя данным работам , введем гистограмму $F(x, \tau)$ изменения цен $x = p_{t+\tau} - p_t$. Результаты показывают, что наш ряд $F(0, \tau)$ демонстрирует скейлинговое поведение дохода, которое наблюдается в реальном рынке. Доход демонстрирует поведение τ^{-H} с $H \simeq 0.62$ (экспонента Херста). Это распределение демонстрирует скейлинговое поведение общего (с $H = 0.62$) вида:

$$F(x, \tau) = \tau^{-H} F\left(x\tau^{-H}, 1\right) = \tau^{H} g\left(x\tau^{-H}\right), \tag{5.10}$$

что весьма близко к реальному поведению цен. "Хвост" этого распределения имеет степенной характер $F(x, \tau) \sim x^{-\alpha}$ с экспонентой близкой к 2. Это значение меньше реально наблюдаемого (≈ 4.5). Мы считаем , что это расхождение обьясняется различием в описании редких событий в жизни. При экстремальных событиях в реальной жизни правила поведения быстро меняются, у нас же они постоянны; это и приводит, как мы считаем, к расхождению.

В стационарном состоянии удобно характеризовать рынок распределением трэйдеров по доходам. Зипф обнаружил, что распределение доходов индивидуумов в обществе следует степенному закону (закону Зипфа). В нашем искусственном обществе распределение активов игроков представлено в виде капитала $C(n)$ от n (у нас 1000 игроков). Найденный нами показатель степени ≈ -1.2 недалек от значения Зипфа.

Остановимся на робастности наших результатов. Нужно избегать крахов и резких изменений активов. Если результаты достаточно стабильны (без крахов), мы получаем сходные с реальностью характеристики процесса. Но если мы включаем возможность использовать бедными стратегии богатых, индекс H изменяется от 0.62 до 0.5. Итак, мы нашли реалистичное поведение рынка в простой модели без внешних воздействий. Игроки торгуют друг против друга, пытаясь выжить. Такая система демонстрирует нетривиальное поведение временных рядов. Хотя мы исключили воздействие всех информационных событий, модель демонстрирует реалистичное поведение. Это говорит о том, что статистика реального рынка определяется взаимодействием спекулянтов друг с другом и носит характер, описываемый техническим анализом, а не определяется фундаментальными экономическими механизмами.

5.3. Формализм модели и обзор ее свойств

Наша модель рынка состоит из N агентов, которые могут находиться в двух состояниях: buy и sell в каждый момент времени t. Мы описываем это следующим образом: каждый агент $i = 1, \ldots, N$ в момент времени t производит действие $a_i(t) = +1$ (buy) или $a_i(t) = -1$ (sell). Учитывая действия всех агентов, выигрыш i агента есть

$$g_i(t) = -a_i(t)A(t), \quad \text{где} \quad A(t) = \sum_{j=1}^{N} a_j(t). \tag{5.11}$$

Это уравнение моделирует основную структуру рыночного взаимодействия, где доход каждого агента определяется действием всех остальных участников рынка через величину $A(t)$, которая пропорциональна цене актива и определяется всем рынком. Для целей простоты мы выберем линейную зависимость $g_i(t)$ от $A(t)$. Другие выборы, могут быть проанализированы без особых изменений. Этот тип взаимодействий отражает правило меньшинства (выигрывает тот, кто в конечном счете оказался в меньшинстве: выигрыш $a_i(t) = -\operatorname{sign} A(t)$), потери большинства равны $-|A(t)|$.

Естественно, что здесь число проигравших больше числа выигравших и агенты не могут знать, что будет делать большинство до тех пор, пока выбор не будет сделан. Все агенты имеют доступ к публичной информации, которая описывается целым числом μ и принимает значения от 1 до P. В момент времени t информация принимает значение $\mu(t)$. Мы будем называть эту величину историей, поскольку первоначально она вводилась через бинарную строчку длины $M = \log_2 P$. Было показано, что если взять $\mu(t)$ из интервала $\{1, \ldots, P\}$, то мы получаем тот же результат. Поэтому мы будем использовать именно этот более простой случай.

Когда агенты имеют некую информацию о рынке, то разные значения $\mu(t)$ для него неравнозначны, что определяется его личным опытом изучения влияния информации на доход. Строго говоря, $A(t)$ зависит только от того, что агенты делают, так что $\mu(t)$ не имеет прямого воздействия на рынок. Конечно, если поведение агентов воздействует на $A(t)$, то мы будем обозначать это действие через $A^{\mu(t)}(t)$.

Как агенты выбирают свои действия на основе информации $\mu(t)$? Если агенты ожидают, что $\mu(t)$ содержит некую информацию о рынке, они следуют некоторой стратегии предсказания, которая говорит, какое действие совершать при конкретных значениях. Всего существует 2^P стратегий, но мы предположим, что каждый агент выбирает из общего количества стратегий всего лишь S. Действия агента i, если он следует s стратегии, учитывая информацию μ, есть $a^{\mu}_{s,i}$. Следовательно, если действие агента есть $s_i(t)$, то справедливо следующее отображение: $a_i(t) \to a^{\mu(t)}_{s_i(t),i}$ и соответственно для дохода:

$$g_i(t) = -a^{\mu(t)}_{s_i(t),i} A^{\mu(t)}(t), \quad \text{где} \quad A^{\mu(t)}(t) = \sum_{j=1}^{N} a^{\mu(t)}_{s_j(t),j}. \tag{5.12}$$

В данной работе мы выбираем $S = 2$. Этот случай содержит все богатство более сложной ситуации и допускает более простое представление. Все результаты можно обобщить на случай более высоких S. Для $S = 2$ мы примем следующее обозначение для стратегии $s_i \in \{,\}$. Полезно различать стратегии s_i от действий a_i. Удобно ввести переменные:

$$\omega_i^{\mu} = \frac{a^{\mu}_{,i} + a^{\mu}_{,i}}{2}, \qquad \xi_i^{\mu} = \frac{a^{\mu}_{,i} - a^{\mu}_{,i}}{2} \tag{5.13}$$

Используя эти обозначения, действие может быть записано в виде

$$a^{\mu}_{i,s_i} = \omega_i^{\mu} + \xi_i^{\mu} s_i. \tag{5.14}$$

Здесь ω_i^{μ} описывает часть стратегии, которая фиксирована в то время как ξ_i^{μ} -есть переменная часть. Мы также определим $\Omega^{\mu} = \sum_i \omega_i^{\mu}$, так что выражение для $A(t)$ примет вид

$$A^{\mu}(t) = \sum_{i=1}^{N} a^{\mu}_{i,s_i(t)} = \omega^{\mu} + \sum_{i=1}^{N} \xi_i^{\mu} s_i(t). \tag{5.15}$$

Каждый агент изменяет свой суммарный счет (cumulated virtual payoff) согласно:

$$U_{s,i}(t+1) = U_{s,i}(t) - A^{\mu(t)}(t)\, a^{\mu(t)}_{i,s} \tag{5.16}$$

Величина $U_{i,s}$ есть индекс ответственности (reliability index), который характеризует восприятие агентом успешности стратегии s^{th}. Величина $U_{i,s}(t)$ есть виртуальный доход агента, если он играл свою стратегию в момент времени t при условии, что остальные агенты играют свои стратегии $s_j(t')$ в момент $t' < t$). Виртуальность означает, что это не реальный выигрыш, а всего лишь ожидания агента . Эти доходы отличаются, поскольку агент не учитывает свое влияние на рынок (факт, что если агент играет стратегию s, то суммарная величина A будет другой).

Индуктивная динамика [1] состоит в предположении, что агенты следуют наиболее надежным стратегиям, т.е. тем, которые приводят к большим виртуальным выигрышам:

$$s_i(t) = \arg\max_{s \in \{,\}} U_{i,s}(t). \tag{5.17}$$

В более общем случае можно рассматривать выбор вероятностных правил , называемых Logit-модель, такую, что $P(s_i(t) = s) \propto$

$\exp[\Gamma U_{s,i}(t)]$. Уравнение (5.17) есть частный случай данной формулы. Полезно ввести следующую переменную $\Delta_i(t) = U_{i,} - U_{i,}$. Ее динамика определяется уравнением:

$$\Delta_i(t+1) = \Delta_i(t) - A^{\mu_t}(t)\xi_i^{\mu_t}, \tag{5.18}$$

а (5.17) дает

$$s_i(t) = \Delta_i(t). \tag{5.19}$$

5.4. Обозначение для средних

Определим временные средние для динамических величин $R(t)$:

$$R = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} R(t). \tag{5.20}$$

Эта величина может быть разложена в условное среднее по истории:

$$R^{\mu} = \lim_{T\to\infty} \frac{P}{T}\sum_{t=1}^{T} R(t)\delta_{\mu(t),\mu}. \tag{5.21}$$

Отметим, что фактор P и условие $\delta_{\mu(t),\mu} = 1/P$ говорят, что R^{μ} есть условное среднее, т.е. величина $R(t)$ усредняется по времени с условием, что история есть $\mu(t)$. Суммарное среднее по историям определяется

$$R \equiv \frac{1}{P}\sum_{\mu=1}^{P} R^{\mu}. \tag{5.22}$$

5.5. Основные величины

Найдем основные величины, которые определяют равновесные характеристики рынка. Основной параметр (как показано в [5]), есть

$$\alpha = \frac{P}{N}, \tag{5.23}$$

и мы будем изучать термодинамический предел $N, P \to \infty$ при α фиксированном. Первая важная величина

$$\sigma^2 \equiv A^2 = \Omega^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\Omega\xi_i s_i s_i + \sum_{i,j}\xi_i\xi_j s_i s_j. \tag{5.24}$$

Она равна суммарному проигрышу агентов

$$-\sum_i g_i = \sigma^2, \tag{5.25}$$

Эта величина измеряет волантильность рынка, т.е. флуктуации $A(t)$, и связана со средним расстоянием между агентами. Даже если $A = 0$, симметрийные соображения говорят, что для конкретных μ суммарная величина $A^{\mu} \neq 0$. Для описания этой асимметрии мы введем величину

$$H \equiv A^2 = \Omega^2 + 2\sum_{i=1}^{N}\Omega\xi_i s_i s_i + \sum_{i,j}\xi_i\xi_j s_i s_j. \tag{5.26}$$

Отметим, что разница между σ^2 описывается диагональными слагаемыми ($i = j$) последней суммы. Положим, что $s_i s_j = s_i s_j$ для $i \neq j$, в то же время s_i некоррелированы с $s_j - s_j$. $s_i^2 \equiv 1 \neq {s_i}^2$. Тогда

$$\sigma^2 = H + \sum_{i=1}^{N}\xi_i^2(1 - {s_i}^2). \tag{5.27}$$

Если $H > 0$, игра асимметрична (т.е. для некоторого μ имеем $A^{\mu} \neq 0$). Это означает, что существует лучшая стратегия $a^{\mu}_{\text{best}} = -A^{\mu}$, которая может дать положительный доход. Используя язык экономики, мы можем сказать, что в системе возможен арбитраж и данная величина есть мера этого арбитража, существующего в системе. Как функция $\alpha = P/N$ система демонстрирует фазовый переход с нарушением симметрии [5]. Для $\alpha > \alpha_c$ симметрия между двумя знаками $A(t)$ нарушена. H -весьма показательная величина, поскольку в [3, 4] было показано, что индуктивная динамика эквивалентна динамике системы, которая минимизирует H следующей переменной: $m_i = s_i$. Следовательно, эта переменная дает основное состояние, которое является равновесным в экономическом плане. Отметим, что в теории твердого тела H называется гамильтонианом спинового стекла, где $\Omega\xi_i$–локальные магнитные поля, $\xi_i\xi_j$ есть обменные интегралы между спинами. Эта система интегралов есть система средних полей, поскольку $\xi_i\xi_j$ —бесконечного радиуса. Поэтому метод статистической физики (метод реплик) дает здесь точные результаты. Поведение агентов описывается величинами Δ_i. Для больших времен $\Delta_i \simeq v_i t$, где

$$v_i = \Delta(t+1) - \Delta_i(t) = -2A\xi_i. \tag{5.28}$$

Если $v_i \neq 0$, агент i выбирает одну стратегию $s_i = v_i$, если же $v_i = 0$ агент использует как , так и стратегии. Это описывается величиной m_i, и флюктуации всего рынка между различными стратегиями даются величиной

$$Q = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} m_i^2. \tag{5.29}$$

5.6. Заключение

В этой работе мы показали, как задавать вопросы о реальных рыночных механизмах в простой модели информационных потоков. Несмотря на простоту MG модели, ее можно легко модифицировать для изучения широкого спектра проблем, о которых раньше можно было только мечтать. Центральная задача - показать, как совокупность агентов с ограниченной рациональностью может создавать эффективный рынок. В первом приближении популяция агентов создает равновесное положение. Более углубленное изучение показывает, что учет флюктуаций делает рынок более эффективным. Это означает, что агенты не могут не играть и сидеть в одном месте. Если агенты поступят так, рынок сразу теряет эффективность. Как раз вокруг этой остаточной эффективности и колеблется рынок. С введением producers игра становится для агентов выгодной. Мы показали, как спекулянты и producers живут в симбиозе; producers - пассивные игроки, которые не хотят менять своих стратегий. Они дают спекулянтам возможность выиграть, поскольку имеют более доходный бизнес. Producers поставляют информацию в рынок, на котором живут спекулянты. Спекулянты, унося с рынка профит, выполняют социальную функцию поддержания ликвидности и уменьшения воздействия producers на рынок. Мы верим, что эти механизмы важны в жизни.

Литература

1. Challet D. and Zhang Y.-C. Physica A 1997, vol.246, p.407 (adap-org/9708006).

2. Zhang Y.C., Europhys. News 1998, N29,p.51 (cond-mat/9803308)

3. Challet D., Marsili M., and Zecchina R., preprint cond-mat/9904392

4. Marsili M., Challet D., and Zecchina R., preprint cond-mat/9908480

5. Savit R., Manuca R., and Riolo R., PRL, 1999,vol.82,p.2203 (adap-org/9712006).

6. Challet D. and Zhang Y.-C., Physica A 1998, vol.256,p.514 (cond-mat/9805084);

7. Zhang Y.C., Physica A 1999,vol.269,p.30. (cond-mat/9901243)

8. Johansen A. and Sornette D., *Financial "anti-bubbles": log-periodicity in Gold and Nikkei collapses*,// Int. J. Mod. Phys. B,1999. in press, preprint http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9901268.

9. Johansen A., Ledoit O. and Sornette D. *Crashes as critical points*// Int. J. Theor. & Appl. Finance. Vol.3, No. 1,1998, см. также: http://xxx.lanl.gov/abs/cond-mat/9810071.

Modelling of complex system with information exchange by physical methods

V.M. Zharkov
Institute of Natural Sciences of Perm State University. Russia, 614600, Perm, Genkel st. 4

Abstract. Review of modern econophysics is made.Theory of Sornette, Zhang and Lux are described.